MATEMATICKÝ ADVENTNÍ KALENDÁŘ 2025

1. úloha (pondělí 1. 12.)

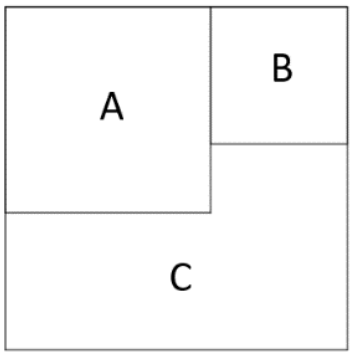
Blíží se konec roku, brzy přijde čas zbavit se kalendáře. Nebo ne?
V jakém nejbližším roce by bylo možné znovu použít kalendář pro rok 2025?
(tak, aby si vždy vzájemně odpovídalo každé datum a den v týdnu)

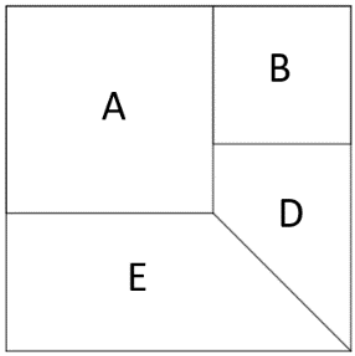
Řešení: 2031
Počet správných odpovědí: 59

Postup: Běžný kalendářní rok má 365 dní, přitom $365 = 52 \cdot 7 + 1$, tj. obsahuje 52 úplných týdnů a 1 den navíc. Přestupný* rok má 366 dní, přitom $366 = 52 \cdot 7 + 2$, tj. obsahuje 52 úplných týdnů a 2 dny navíc. Proto pokud rok začíná např. v pondělí, pak další rok bude začínat buď v úterý, nebo ve středu v závislosti na tom, zda byl uplynulý rok běžný či přestupný. Můžeme tedy vytvořit přehled, z něhož je vidět správná odpověď:
2025 … 1. 1. středa … běžný
2026 … 1. 1. čtvrtek … běžný
2027 … 1. 1. pátek … běžný
2028 … 1. 1. sobota … přestupný
2029 … 1. 1. pondělí … běžný
2030 … 1. 1. úterý … běžný
2031 … 1. 1. středa … běžný
Poznamenejme, že obecně neplatí, že je vždy možné použít znovu kalendář po 6 letech, což je dáno přestupnými roky. Např. kalendář pro rok 2026 by nebylo možné použít znovu v roce 2032, neboť ten sice začíná také ve čtvrtek, ale je přestupný (nejbližším rokem by byl v tomto případě až rok 2037).
* Rok označený číslem dělitelným čtyřmi, které není zároveň dělitelné 200.

2. úloha (úterý 2. 12.)

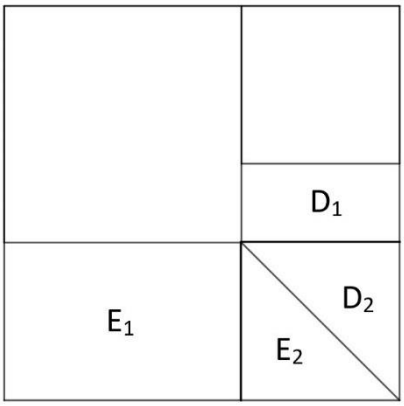
Je dán čtverec a v něm dva menší čtverce o obsazích A = 36, B = 16.
(zadání pro NG) Určete obsah obrazce C.
(zadání pro VG) Určete poměr obsahů D : E.

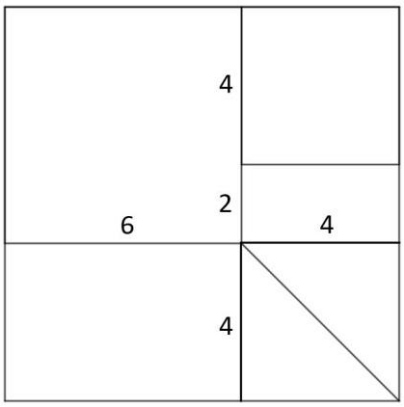




Řešení: 48 (NG), 1 : 2 (VG)
Počet správných odpovědí: 59

Postup: Ze zadaných obsahů vyplývá, že délky stran čtverců označených A, B jsou postupně 6 a 4. Délka strany velkého čtverce je proto 6 + 4 = 10 a tento čtverec má obsah $10^2 = 100$.
(NG) Obsah obrazce C je tedy roven 100 – 36 – 16 = 48.
(VG) Obrazce D, E jsou pravoúhlé lichoběžníky. Jejich obsahy můžeme spočítat buď užitím vzorců, nebo rozdělením na menší útvary:





Dle obrázků platí:

$$\frac{D}{E} = \frac{D_1 + D_2}{E_1 + E_2} = \frac{8+8}{24+8} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

3. úloha (středa 3. 12.)

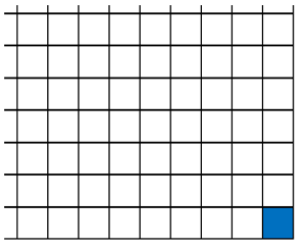
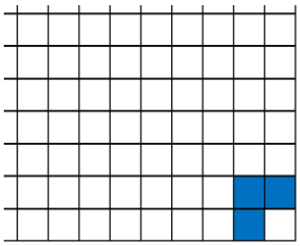
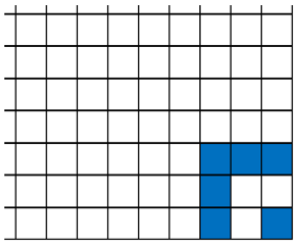
Máme tři nádoby o objemech 9 litrů, 8 litrů a 2 litry. Přitom největší nádoba je plná, zbylé dvě prázdné. **Jaký nejmenší počet přelití potřebujeme, jestliže chceme získat množství 2, 3 a 4 litry** (bez ohledu na pořadí nádob)?
(Nádoby nemají žádnou rysku ani jinou měrku.)

Řešení: 4
Počet správných odpovědí:

Postup: Vyjdeme z posloupnosti 9 – 0 – 0, která značí počáteční množství vody v 9litrové, 8litrové a 2litrové nádobě v tomto pořadí. Naším úkolem je najít nejmenší množství kroků (přelití) tak, aby se v ní vyskytla čísla 2, 3, 4 v libovolném pořadí.
Je to možné udělat např. takto v 5 krocích:
9 – 0 – 0
7 – 0 – 2
7 – 2 – 0
5 – 2 – 2
5 – 4 – 0
3 – 4 – 2
Existuje však rychlejší způsob, mající pouze 4 kroky:
9 – 0 – 0
1 – 8 – 0
1 – 6 – 2
3 – 6 – 0
3 – 4 – 2

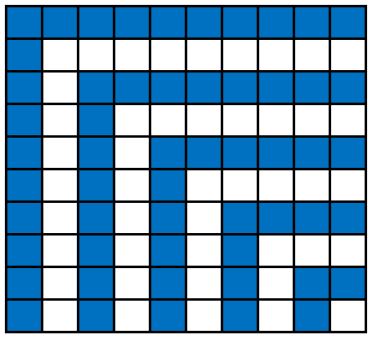
4. úloha (čtvrtek 4. 12.)

Je dána čtvercová tabulka obsahující 10 x 10 (NG), resp. 50 x 50 (VG a Open) bílých čtverců. V prvním kroku se pravý dolní čtverec tabulky obarví namodro. V každém dalším kroku se nejprve všechny čtverce sousedící (stranou či vrcholem) s modrými čtverci obarví namodro, poté se původní modré čtverce obarví zpět nabílo. Na obrazcích jsou vidět prví tři kroky obarvování v neúplné tabulce.
Určete, kolik čtverců v tabulce bude modrých po přesně 10 (NG), resp. 50 (VG a Open) krocích.

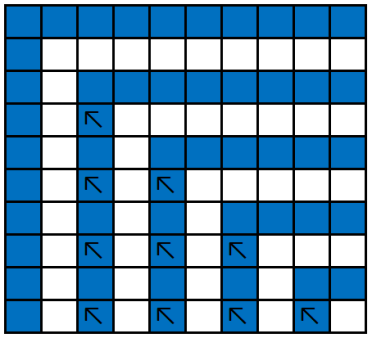
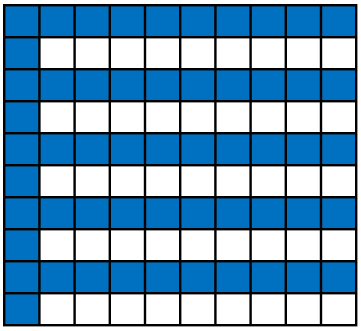




Řešení: 55 (NG), 1275 (VG)
Počet správných odpovědí: 40

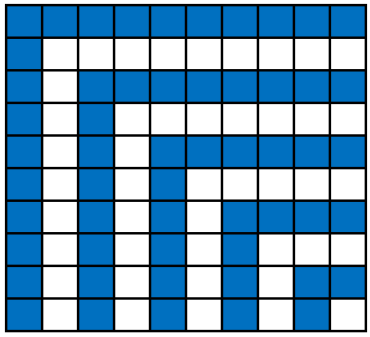
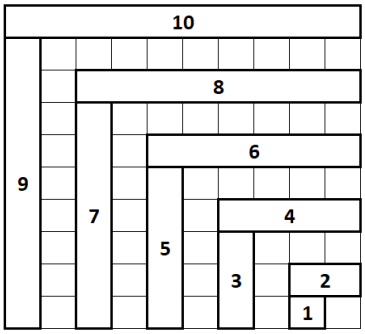
Postup: V obou zadáních vypadá tabulka po provedení uvedeného počtu kroků tak, že její horní řádek a levý sloupec jsou modré a dále se barvy pravidelně střídají (viz obrázek).



Ukážeme si nejprve jeden velmi elegantní způsob řešení užitím vhodného přeskládání modrých čtverečků. Vybrané modré čtverečky přeskupíme tak, abychom doplnili chybějící místa v řádcích (první obrázek). Obdržíme tím kompletní modré řádky střídající se pravidelně s neúplnými bílými (druhý obrázek).

Počet modrých čtverečků v úplných modrých řádcích je tedy roven polovině celkového počtu všech čtverečků, tj. v případě tabulky 10 x 10 se jedná o 50 čtverečků (obecně $\frac{1}{2}n^2$). Zbývá již pouze přičíst modré čtverečky v neúplných bílých řádcích, kterých je stejně jako těchto řádků, tj. 5 v tabulce 10 x 10 (obecně $\frac{1}{2}n$). V tabulce 10 x 10 je proto 50 + 5 = 55 modrých čtverečků. Obecně je jejich počet roven $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Pro *n* = 10 obdržíme *s* = 55, jak již bylo řečeno, pro *n* = 50 je *s* = 1 275.
Úlohu lze řešit i dalšími způsoby, ukažme si ještě jeden „klasičtější“ přístup.

Všimněme si, že počty modrých čtverců jsou směrem z pravého dolního rohu do levého horního rohu postupně 1 + 2 + 3 + … + *n*, kde *n* je rozměr tabulky (viz druhý obrázek). Hledané součty pro *n* = 10 (NG), resp. *n* = 50 (VG), můžeme spočítat užitím kalkulačky, ukážeme si však ještě odvození obecného vzorce pro jejich určení.
Napišme si dvakrát pod sebe hledaný součet *s*, přitom jednou „zleva doprava“ a podruhé „zprava doleva“:

$$s = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$s = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Po sečtení obou rovností obdržíme:

$$2s = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots + (n-2+3) + (n-1+2) + (n+1)$$

Všimněme si, že uvnitř všech závorek na pravé straně je stejný součet *n* + 1, přitom závorek je právě *n*. Platí proto:

$$2s = n \cdot (n+1) \qquad /:2$$
$$s = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

Pro *n* = 10 obdržíme *s* = 55, pro *n* = 50 je *s* = 1 275.

5. úloha (pátek 5. 12.)

Vedení BIGY se po roce opět přestrojilo za Mikuláše, anděla a dva čerty. **Kdo letos zastával roli Mikuláše**, jestliže jsou známá následující tvrzení, přitom čerti mluví vždy nepravdu a anděl s Mikulášem vždy pravdu.
Petr Beneš: „Ondřej Bouma je Mikuláš.“
Ondřej Bouma: „Nejsem Mikuláš.“
Jiří Vojáček: „Nejsem čert.“
Iva Štěrbová: „Ondřej Bouma není čert.“

Řešení: Iva Štěrbová
Počet správných odpovědí: 49

Postup: Analyzujme postupně uvedené výroky. Výrok „Nejsem Mikuláš.“ nemůže pronést Mikuláš (lhal by) ani čert (mluvil by pravdu), proto je jeho autorem nutně anděl. Ondřej Bouma je tedy převlečen za anděla a první výrok „Ondřej Bouma je Mikuláš.“ je proto nepravdivý, což znamená, že Petr Beneš je převlečen za čerta. Ze třetího výroku „Nejsem čert.“ není možné učinit žádný závěr, neboť jej může pronést jak čert (lže), tak Mikuláš (mluvící pravdu). Zaměříme se proto na poslední výrok, který je dle předchozího pravdivý a pronesl jej tedy Mikuláš, jehož roli zastává Iva Štěrbová.

6. úloha (sobota 6. 12.)

Číslo $n!$ se čte jako „n faktoriál“ a je definováno následovně:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 2 \cdot 1$
Např. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$
$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ apod.
Zapište pomocí faktoriálu, kolik sekund je:
(zadání pro NG) 12 minut.
(zadání pro VG) 6 týdnů.

Řešení: 6! (NG), 10! (VG)
Počet správných odpovědí: 44

Postup: Vyjádříme obě hodnoty ze zadání v sekundách:
(NG) 12 min = 12 · 60 s = 4 · 3 · 6 · 2 · 5 s = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 s = 6! s
(VG) 6 týdnů = 6 · 7 dní = 6 · 7 · 24 h = 6 · 7 · 24 · 60 min = 6 · 7 · 24 · 60 · 60 s = 6 · 7 · 8 · 3 · 10 · 3 · 2 · 5 · 2 · 3 · 2 s = 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 s = 10! s

7. úloha (neděle 7. 12.)

Dřevěnou krychli o délce hrany 4 natřeme celou na modro, a poté ji rozřežeme na krychle o délce hrany 1.
Vypočtěte, kolik % stěn těchto jednotkových krychliček je modrých.

Řešení: 25 %
Počet správných odpovědí: 48

Postup: Z původní krychle vznikne 4 · 4 · 4 = 64 jednotkových krychliček. Každá z nich má 6 stěn, celkový počet všech jejich stěn je tedy roven 64 · 6 = 384. Počet modrých stěn vypočteme jednoduše z původní krychle, je roven jejímu povrchu 6 · 4 · 4 = 96. Jejich zastoupení na celkovém počtu je proto $\frac{96}{384} = \frac{1}{4}$, což odpovídá 25 %.
Závěrem ještě poznamenejme, že výsledný podíl $\frac{1}{n}$ pro *n* = 4 není náhodný a odpovídá obecnému řešení úlohy. Pro délku hrany *n* totiž obdržíme podíl $\frac{6n^2}{6n^3} = \frac{1}{n}$.

8. úloha (pondělí 8. 12.)

Řešte „hudební“ rovnici danou písemným sčítáním:
A B B A
A C D C
B A N D
Přitom A, B, C, D, N jsou různé číslice a ABBA, ACDC, BAND čtyřciferná čísla, pro která platí ABBA + ACDC = BAND.
Určete číslo BAND = ?

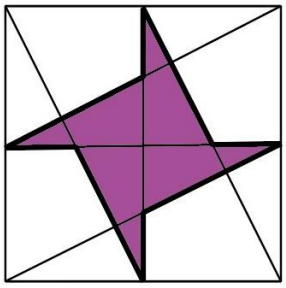
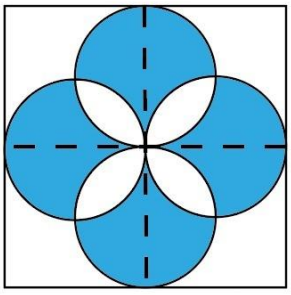
Řešení: 5238
Počet správných odpovědí: 41

Postup: Na úvod poznamenejme, že sčítáme pouze dvě čísla, proto součty cifer na odpovídajících si místech nabývají hodnot v rozmezí 2 (1 + 1) až 18 (9 + 9). Přecházíme-li tedy od součtu cifer daného řádu k řádu vyššímu (např. od jednotek k desítkám apod.) přičítáme buď 0, nebo 1.
Začněme tedy na místě tisíců, kde platí jedna z rovností A + A = B, nebo A + A + 1 = B (pokud musíme při přechodu od součtu na místě stovek přidávat 1). V obou případech je tedy A < B. Na místě stovek však sčítáme číslice B + C, přičemž výsledný součet končí číslicí A (menší než samotné B). Tento součet je tedy větší než 10 a na místě tisíců platí rovnost A + A + 1 = B.
Cifra A je tedy rovna jedné z hodnot 1, 2, 3 nebo 4 a stačí již postupně rozebrat všechny možnosti.
1) Pro A = 4 je B = 2A + 1 = 9:
4 9 9 4
4 C D C
9 4 N D … Muselo by platit C = 4 (kvůli součtu na místě desítek), což není možné, neboť již A = 4.
2) Pro A = 3 je B = 2A + 1 = 7:
3 7 7 3
3 C D C
7 3 N D … Musí platit C = 6, nebo C = 5.
2a) Pro C = 6:
3 7 7 3
3 6 D 6
7 3 N D … Muselo by být D = 9, dále však již nenalezneme žádné vyhovující N.
2b) Pro C = 5:
3 7 7 3
3 5 D 5
7 3 N D … Muselo by být D = 8, pak však N = 5 = C, což nelze.

3) Pro A = 2 je B = 2A + 1 = 5
2 5 5 2
2 C D C
5 2 N D … Musí platit C = 7, nebo C = 6.
3a) Pro C = 7:
2 5 5 2
2 7 D 7
5 2 N D … Muselo by být D = 9, dále však již nenalezneme žádné vyhovující N.
3b) Pro C = 6:
2 5 5 2
2 6 D 6
5 2 N D … **Muselo by být D = 8, pak N = 3, což odpovídá řešení úlohy!**
4) Pro A = 1 je B = 2A + 1 = 3
1 3 3 1
1 C D C
3 1 N D … Musí platit C = 8, nebo C = 7
4a) Pro C = 8:
1 3 3 1
1 8 D 8
3 1 N D … Muselo by být D = 9, dále však již nenalezneme žádné vyhovující N.
4b) Pro C = 7:
1 3 3 1
1 7 D 7
3 1 N D … Muselo by být D = 8, pak však N = 1 = A, což nelze.

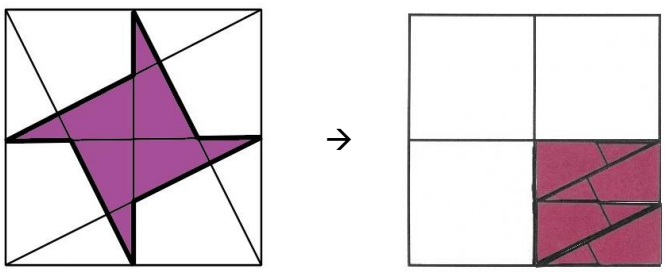
9. úloha (úterý 9. 12.)

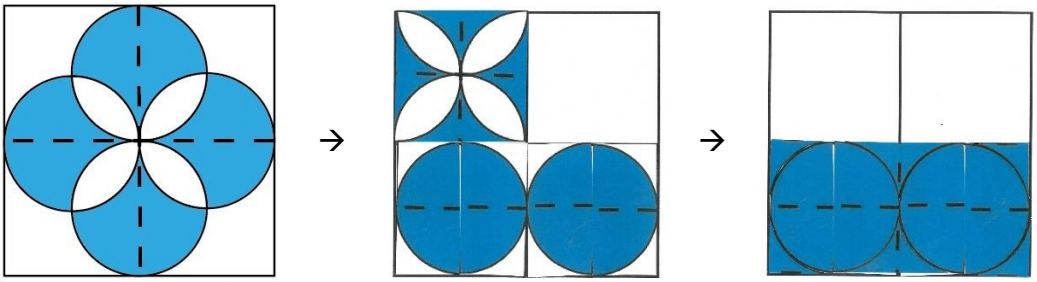
Pan Koch se rozhodl vystřihnout si drobnou vločku na vánoční přání. Našel si proto kousek papíru ve tvaru čtverce o délce strany 4 cm a na něj si vločku narýsoval.
(zadání pro NG) Jaký obsah v cm^2 bude mít vytvořená fialová vločka?
(zadání pro VG) Jaký obsah v cm^2 bude mít vytvořená modrá vločka?

Řešení: 4 (NG), 8 (VG)
Počet správných odpovědí: 36

Postup: Úlohu lze řešit různými způsoby využívajícími např. vzorce pro výpočty obsahů jednotlivých útvarů, my si však ukážeme jedno velmi elegantní řešení pomocí přeskládání jednotlivých částí vloček.





Vidíme, že obsah fialové vločky je roven čtvrtině obsahu původního čtverce, zatímco obsah modré vločky je poloviční. Vzhledem k tomu, že obsah původního čtverce je $4^2 = 16$ cm^2, je obsah fialové vločky 4 cm^2, obsah modré vločky pak 8 cm^2.
(Jméno pana Kocha v zadání úlohy odkazuje na jednu z nejznámějších fraktálních křivek - Kochovu vločku, pojmenovanou po švédském matematikovi Helge von Kochovi.)

10. úloha (středa 10. 12.)

Kolika způsoby lze přečíst slogan BIGYHK♡ v následující tabulce tak, aby spolu vždy po sobě jdoucí písmena sousedila?

B	I	G	Y
I	G	Y	H
G	Y	H	K
Y	H	K	♡

Řešení: 20
Počet správných odpovědí: 29

Postup: Všimněme si nejprve, že číst slogan v zadání úlohy lze pouze tak, že se v tabulce pohybujeme doprava nebo dolů. Zadání úlohy lze proto formulovat též následovně: Kolika způsoby se lze v tabulce 4 x 4 dostat z levého horního pole do pravého dolního pole tak, abychom se pohybovali vždy pouze doprava nebo dolů. Správný počet možností lze jistě určit graficky např. užitím čtverečkovaného papíru, my si však ukážeme dva početní způsoby.
Jednotlivá pole tabulky můžeme jednoduše vyplnit čísly tak, že číslo v každém poli udává, kolika způsoby se lze do tohoto pole dostat. Mějme přitom na paměti, že se pohybujeme pouze dvěma směry (doprava a dolů), každé číslo je proto součtem čísel v sousedních polích nad a vlevo od daného pole (pokud taková pole existují).

1	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20

Celkem tedy existuje 20 způsobů, jak se dostat do pravého dolního pole tabulky.

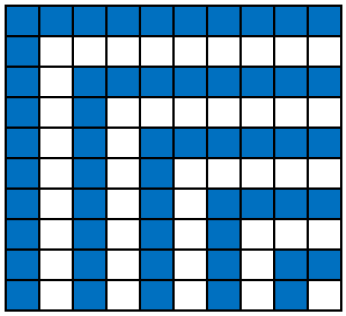
Při řešení úlohy můžeme také využít prostředků kombinatoriky. Zkoumáme-li počet způsobů, kolika se lze v tabulce 4 x 4 dostat z levého horního pole do pravého dolního pole (zadání naší úlohy), pak lze každý takový způsob zaznamenat užitím písmen P (pohyb doprava) a D (pohyb dolů) jako 6místný kód, obsahující právě tři písmena P a tři písmena D (např. kód DPPDPD značí postupně pohyby do sousedních polí v pořadí dolů – doprava – doprava – dolů – doprava – dolů). Nyní již stačí určit, kolik takových kódů existuje.
Jedná se o uspořádané šestice, v nichž se vyskytují dvě trojice stejných písmen. Jejich počet je roven počtu permutací s opakováním $\frac{6!}{3!3!}$, kde číslo 6! v čitateli značí počet všech uspořádaných šestic, 3! ve jmenovateli jsou kvůli stejným písmenům. Lze také využít toho, že na 6 míst kódu umístíme nejprve všechna písmena P, což lze učinit rovněž $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ způsoby.

11. úloha (čtvrtek 11. 12.)

Letošní rok je označen krásným číslem 2025. To lze totiž mimo jiné
vyjádřit jako součet po sobě jdoucích lichých čísel:
1 + 3 + 5 + 7 + … = 2025
Určete poslední sčítanec tohoto součtu.
(nápověda: Zkuste vhodně využít obrázek k úloze zadané před týdnem.)

Řešení: 89
Počet správných odpovědí: 42

Postup: Obrázek z úlohy zadané před týdnem vypadá následovně:



Je na něm vidět známý vztah pro součet po sobě jdoucích lichých čísel:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Zároveň platí 2025 = 45^2. Proto se jedná o 45 po sobě jdoucích lichých čísel a největší z nich je rovno $2n - 1 = 2 \cdot 45 - 1 = 89$.

12. úloha (pátek 12. 12.)

Manželům Prvočíslovým je 29 a 31 let a mají tři děti ve věku 2, 5 a 7 let.
Kolik let bude nejstaršímu z dětí, až bude součet věku všech tří dětí stejný jako součet věku obou rodičů?

Řešení: 53
Počet správných odpovědí: 40

Postup: Za *x* let bude jednotlivým členům rodiny 29 + *x*, 31 + *x*, 2 + *x*, 5 + *x* a 7 + *x* let. Dle zadání úlohy proto stačí vyřešit rovnici:

$$2 + x + 5 + x + 7 + x = 29 + x + 31 + x$$
$$3x + 14 = 2x + 60$$
$$x = 46$$

Nejstaršímu dítěti bude proto 7 + *x* = 53 let.
(Nikoliv náhodou je hledaný počet let x rozdílem součtu věku manželů a dětí v tuto chvíli, neboť je právě tolik let potřeba, aby jedno dítě „dohnalo počáteční náskok“ ve věku rodičů.)

13. úloha (sobota 13. 12.)

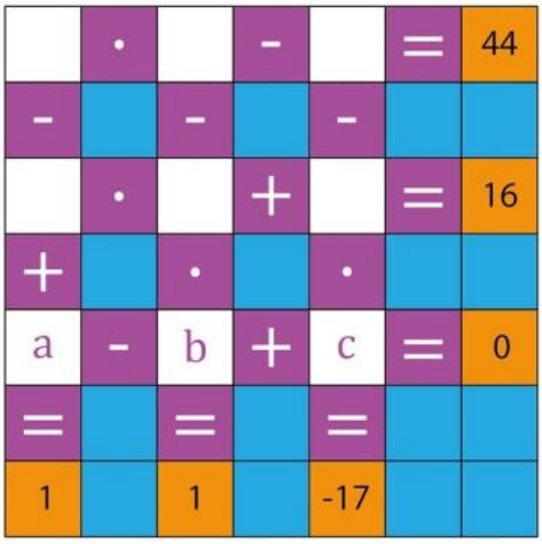
(zadání pro NG) Určete počet všech kladných celočíselných dělitelů čísla 2025 (tj. čísel 1, 3, 5, 9, …, 2025, která dělí 2025 beze zbytku)**.**
(zadání pro VG) Určete počet všech kladných celočíselných dělitelů čísla 2025^{2026}, kteří nejsou zároveň děliteli čísla 2025^{2025}.

Řešení: 15 (NG), 32 414 (VG)
Počet správných odpovědí: 19

Postup: V obou příkladech užijeme prvočíselného rozkladu $2025 = 3^4 \cdot 5^2$.
(NG) Všichni dělitelé čísla $3^4 \cdot 5^2$ jsou tvaru $3^k \cdot 5^l$, kde $0 \leq k \leq 4$, $0 \leq l \leq 2$ jsou celá čísla. Pro číslo k máme tedy 5 hodnot, kterých může nabývat, pro číslo l 3 hodnoty. Celkem proto existuje 5 · 3 = 15 uspořádaných dvojic k, l, z nichž každá reprezentuje jednoho z hledaných dělitelů. (např. $3^3 \cdot 5^1 = 135, 3^0 \cdot 5^2 = 25$ apod.).
(VG) Nejprve si uvědomme vztah mezi zadanými čísly, platí totiž $2025^{2026} = 2025 \cdot 2025^{2025}$. Přitom dle předchozího je:
$2025^{2026} = (3^4 \cdot 5^2)^{2026} = 3^{8104} \cdot 5^{4052}$
$2025^{2025} = (3^4 \cdot 5^2)^{2025} = 3^{8100} \cdot 5^{4050}$
Všichni dělitelé čísla $3^{8104} \cdot 5^{4052}$ jsou tvaru $3^k \cdot 5^l$, kde $0 \leq k \leq 8104$, $0 \leq l \leq 4052$ jsou celá čísla. Pokud však nemají být zároveň děliteli čísla $3^{8100} \cdot 5^{4050}$, pak musí platit alespoň jedna z podmínek $8101 \leq k \leq 8104$, $4051 \leq l \leq 4052$.
Např. pro $k = 8101$ tak máme dle předchozího 4053 možných hodnot pro číslo l (0 až 4052), tj. každé z čísel $3^{8101} \cdot 5^l$ jistě nebude dělitelem čísla $3^{8100} \cdot 5^{4050}$. Podobně máme 4053 možností pro další hodnoty $k = 8102$, $k = 8103$ a $k = 8104$. Dostáváme tak již $4 \cdot 4053 = 16\,212$ čísel a zbývá ještě vyřešit případy, kdy $l = 4051$, $l = 4052$. K nim může být číslo k opět libovolné, nicméně případy, kdy $8101 \leq k \leq 8104$ jsme již započítali (jsou mezi zmíněnými 16 212 děliteli). Proto již uvažujeme pouze 8101 možností pro hodnoty k (0 až 8100). Obdržíme tím dalších $2 \cdot 8101 = 16\,202$ čísel a celkem tak existuje 16 212 + 16 202 = 32 414 dělitelů požadované vlastnosti ze zadání úlohy.

14. úloha (neděle 14. 12.)

Doplňte do bílých políček čísla od 1 do 9 tak, aby byly splněny dané číselné rovnosti. V každém nevybarveném políčku musí být jen jedno číslo a žádné číslo se nesmí opakovat.
Napište hodnoty čísel, které jste doplnili místo písmen a, b, c.



Řešení: a = 2, b = 5, c = 3
Počet správných odpovědí: 34

Postup: Úlohu lze řešit mnoha způsoby, přitom je vhodné pracovat s nerovnostmi $3 \leq m + n \leq 17$, $2 \leq m \cdot n \leq 72$ platnými pro všechny dvojice různých čísel *m*, *n* ze zadané množiny $\{1, 2, \ldots, 9\}$.
Z rovnosti na posledním řádku vidíme, že hledané prostřední číslo *b* je součtem dvou krajních čísel *a*, *c* (platí totiž $a + c - b = 0$). Číslo *b* je tedy rovno alespoň 3 a zaměřme se přímo na něj.
Pokud by platilo $b = 3$, pak čísla *a*, *c* mají hodnoty 1, 2 (v nějakém pořadí). To by však znamenalo, že v prostředním sloupci se od horního čísla odečítá součin minimálně $4 \cdot 3 = 12$ (protože čísla 1, 2 jsou již obsazena) a toto horní číslo by tak nemohlo být jednociferné, aby byla výsledkem rovnosti 1.
Analogicky pro $b = 4$ by čísla *a*, *c* nabývala hodnot 1, 3 (v nějakém pořadí), neboť se obě nemohou rovnat 2. Stejnou úvahou jako v předchozím případě dostáváme, že prostřední sloupec by musel být vyplněn čísly 9, 2, 4 (aby platila požadovaná rovnost $9 - 2 \cdot 4 = 1$). Na prvním řádku by však prvním číslem musela být nutně 5 (kvůli součinu čísel na prvních dvou místech) a tento řádek by vypadal následovně $5 \cdot 9 - 1 = 44$. Číslo 1 však musí být použito na posledním řádku, proto ani tento případ nevede ke správnému řešení.
Zkusíme-li nyní $b = 5$, musí být v prostředním sloupci rovnost $6 - 1 \cdot 5 = 1$ (pokud bychom od horního čísla odečítali $2 \cdot 5$ či více, nemohlo by být jednociferné). Na prvním řádku je tedy $8 \cdot 6 - 4 = 44$ ($7 \cdot 6$ by bylo málo a $9 \cdot 6$ již moc). Další číslice již zjistíme poměrně snadno, neboť v prvním sloupci je nutně rovnost $8 - 9 + 2 = 1$. Vyplněná tabulka vypadá následovně:

8	·	6	−	4	=	44
−		−		−		
9	·	1	+	7	=	16
+		·		·		
2	−	5	+	3	=	0
=		=		=		
1		1		-17		

Platí tedy *a* = 2, *b* = 5, *c* = 3.
Na závěr poznamenejme, že by bylo ještě matematicky správné vyloučit další případná řešení úlohy. To se dá zvoleným postupem učinit jednoduše tak, že za *b* dosazujeme postupně vyšší hodnoty (možné jsou již pouze 6, 7, 8, přitom rovnost v druhém sloupci je tím pevně dána, neboť v prostředním poli je vždy nutně číslo 1).

15. úloha (pondělí 15. 12.)

Vyučující matematiky zjišťoval, kolik žáků vyřešilo domácí úkol samostatně. Dostal následující odpovědi, z nichž jen dvě byly pravdivé:
Patrik: Je nás 9.
Olga: Ne, je nás 6.
Čestmír: Je to číslo, v jehož prvočíselném rozkladu je sudé i liché číslo.
Erika: Náš počet je určitě sudé číslo.
Tomáš: Náš počet je prvočíslo.
Kdo panu učiteli určitě nelhal?

Řešení: Erika
Počet správných odpovědí: 26

Postup: Analyzujeme postupně jednotlivé výroky z hlediska jejich možné pravdivosti. Pro lepší přehlednost si je označme dle počátečních písmen jmen jejich autorů P, O, Č, E, T.

Pokud by byl hledaný počet žáků 9 (výrok P), pak by žádný další výrok nebyl pravdivý. Proto je výrok P nepravdivý.
Pokud by byl hledaný počet naopak 6 (výrok O), pak by byly pravdivé také výroky Č, E, což nesplňuje zadání úlohy.
V dalším bádání využijeme toho, že výroky Č a T jsou v přímém rozporu a mají tak opačnou pravdivostní hodnotu.
Pokud by byl pravdivý výrok Č, pak je jistě pravdivý i výrok E a nepravdivý výrok T, což vyhovuje zadání úlohy (hledaný počet žáků by mohl být např. 12).
Pokud by byl pravdivý výrok E, pak mohou být pravdivé výroky Č a T, dle předchozího však nikoliv zároveň.
Konečně pokud by byl pravdivý výrok T, pak může být pravdivý také výrok E (hledaný počet žáků by byl v takovém případě nutně 2).
Celkově jsou tedy přípustné dvojice pravdivých výroků buď Č, E, nebo E, T. Panu učiteli proto určitě nelhala Erika.

16. úloha (úterý 16. 12.)

Z daných čísel 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12, 16 byla odebrána dvě čísla tak, že aritmetický průměr zbylých čísel zůstal nezměněn.
O která čísla se jednalo?

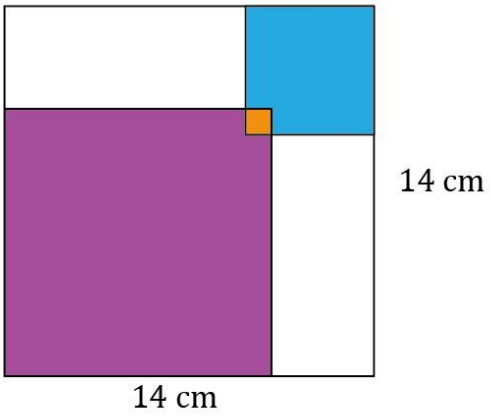
Řešení: 10 a 14
Počet správných odpovědí: 39

Postup: Aritmetický průměr zadaných čísel je roven $\frac{17+13+5+10+14+9+12+16}{8} = \frac{96}{8} = 12$. Máme-li tedy odebrat dvě čísla tak, aby jeho hodnota zůstala nezměněna, musí se jednat o čísla se stejným rozdílem od zadaného aritmetického průměru. Takové podmínce vyhovují čísla 10 = 12 – 2 a 14 = 12 + 2.

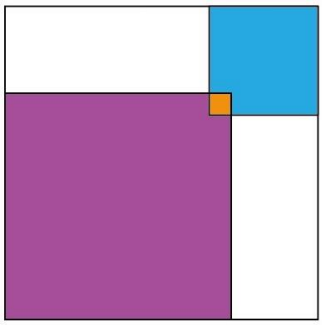
17. úloha (středa 17. 12.)

Ve čtverci o délce strany 14 cm jsou umístěny modrý a fialový čtverec tak, že se vzájemně překrývají v oranžově vyznačeném čtverci o obsahu 1 cm^2.
(viz obrázek)
Jaký je obsah modrého čtverce, víme-li, že je 4krát menší než obsah fialového čtverce?

Řešení: 25 cm^2
Počet správných odpovědí: 38



Postup: Úlohu lze řešit sestavením a vyřešením vhodné rovnice, ukážeme si však též elegantní grafický postup.
Nejprve si v obrázku označme délku strany modrého čtverce jako *x*. Délka strany fialového čtverce je potom rovna 14 – *x* + 1 = 15 – *x*.

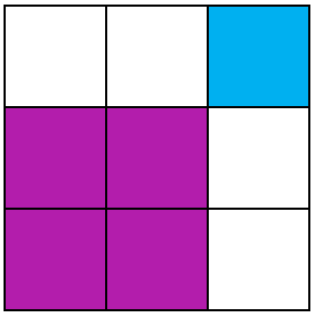


Dle zadání pro obsahy obou čtverců platí vztah daný rovnicí:

$$(15-x)^2 = 4x^2$$
$$225 - 30x + x^2 = 4x^2$$
$$3x^2 + 30x - 225 = 0 \quad /:3$$
$$x^2 + 10x - 75 = 0$$
$$(x-5)\cdot(x+15) = 0$$

Hledaným řešením je $x = 5$, neboť druhé řešení rovnice nesplňuje zadání úlohy (délka strany čtverce nemůže být záporná). Modrý čtverec má proto obsah $x^2 = 25$ cm².

Nyní si ukážeme ještě slíbený grafický způsob řešení úlohy. Posuneme-li totiž modrý čtverec o 1 cm postupně směrem doprava a nahoru, vejdou se oba barevné čtverce do čtverce o délce strany 15 cm, přitom se budou vzájemně dotýkat v jednom z vrcholů.



Fialový čtverec má dle zadání čtyřnásobný obsah než modrý, proto musí mít strana modrého čtverce délku $\frac{1}{3}\cdot 15 = 5$ cm (viz obrázek) a jeho obsah je roven $5^2 = 25$ cm².

18. úloha (čtvrtek 18. 12.)

Na vánoční besídku přišlo 48 dětí. Šest z nich tam mělo právě jednoho sourozence, devět dětí právě dva sourozence, čtyři děti právě tři sourozence. Zbytek dětí na besídce sourozence nemělo.
Z kolika celkem rodin byly děti na besídce?

Řešení: 36
Počet správných odpovědí: 35

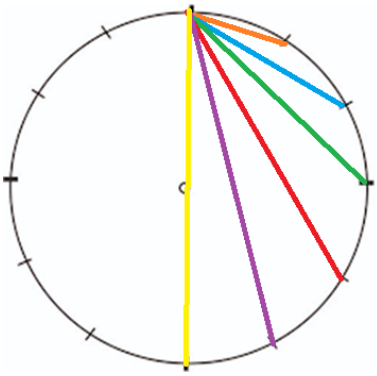
Postup: Počet rodin s jedním dítětem je roven 48 – 6 – 9 – 4 = 29. Sourozenectví je vzájemný vztah, proto např. 6 dětí s právě jedním sourozencem tvoří právě 3 dvojice sourozenců. Analogicky 9 dětí s právě dvěma sourozenci tvoří 3 trojice sourozenců a 4 děti s právě třemi sourozenci je jedna čtveřice sourozenců. Celkový počet rodin zastoupených na besídce je proto 29 + 3 + 3 + 1 = 36.

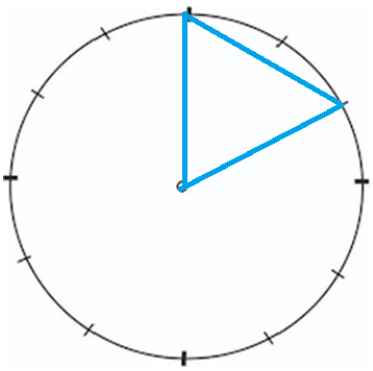
19. úloha (pátek 19. 12.)

Kružnice je rozdělena 12 body na 12 stejně dlouhých oblouků.
(ciferník hodin)
Kolik úseček s krajními body v těchto bodech má délku větší než je poloměr dané kružnice?

Řešení: 42
Počet správných odpovědí: 27

Postup: Úsečky mohou nabývat celkem 6 různých délek (viz první obrázek). Nejprve určíme, které z těchto délek jsou větší než poloměr kružnice. Stačí si uvědomit, že druhá nejkratší úsečka má délku stejnou jako je poloměr kružnice (středový úhel příslušného trojúhelníku má totiž velikost 60° a jedná se tak o rovnostranný trojúhelník, který zároveň tvoří šestinu pravidelného šestiúhelníku – viz druhý obrázek).





Podmínku ze zadání úlohy tedy splňují úsečky čtyř různých délek, jejichž celkový počet je roven 12 + 12 + 12 + 6 = 42. Z každého z 12 bodů totiž můžeme danou úsečku vést ve směru pohybu hodinových ručiček, avšak u nejdelších úseček (kterými jsou průměry kružnice) nám splývá např. úsečka vedená z bodu 12 s úsečkou vedenou z bodu 6 (jejímž druhým krajním bodem by byl opět bod značený na ciferníku 12).

Úlohu lze řešit též výpočtem počtu úhlopříček pravidelného 12úhelníku užitím známého vzorce $\frac{n(n-3)}{2}$, od něhož však musíme ještě odečíst 12 úhlopříček majících délku rovnou poloměru kružnice. Pro hledaný počet úseček dané vlastnosti proto platí $\frac{12\cdot 9}{2} - 12 = 54 - 12 = 42$.

20. úloha (sobota 20. 12.)

(zadání pro NG) Řešte rovnici $120x = x!$
(zadání pro VG) Řešte rovnici $120x^3 = 120x + (x+1)!$
(Symbol ! se čte jako „faktoriál“, např. $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.)

Řešení: 6 (NG), 7 (VG)
Počet správných odpovědí: 29

Postup: Obě rovnice vyřešíme částečným rozepsáním faktoriálu. Libovolný faktoriál totiž můžeme vyjádřit pomocí libovolného nižšího faktoriálu, platí totiž např. $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5 \cdot 4!$ apod.
(NG)

$$\begin{aligned} 120x &= x! \\ 120x &= x \cdot (x-1)! \quad /: x \neq 0 \\ 120 &= (x-1)! \\ 5! &= (x-1)! \\ x &= 6 \end{aligned}$$

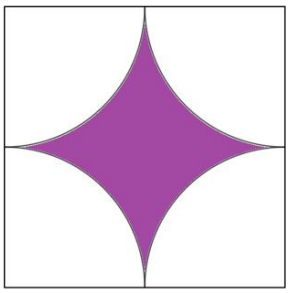
(VG)

$$\begin{aligned} 120x^3 &= 120x + (x+1)! \\ 120x^3 - 120x &= (x+1)! \\ 120 \cdot x \cdot (x^2-1) &= (x+1)! \\ 120 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x+1) &= (x+1)! \\ 120 \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-1) &= (x+1) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2)! \quad /: (x+1)x(x-1) \\ 120 &= (x-2)! \\ 5! &= (x-2)! \\ x &= 7 \end{aligned}$$

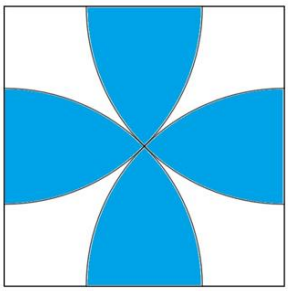
21. úloha (neděle 21. 12.)

Určete obsah vybarveného obrazce ve čtverci o délce strany 12 (středy všech použitých kružnic leží ve vrcholech čtverce).

zadání pro NG:



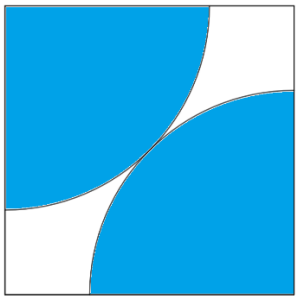
zadání pro VG:



(Uveďte buď přesný výsledek, nebo výsledek zaokrouhlený na celé číslo.)

Řešení: $144 - 36\pi \doteq 31$(NG), $72\pi - 144 \doteq 82$ (VG)
Počet správných odpovědí: 25

Postup: Obě zadání vyřešíme odečtením obsahu nevybarvených částí od obsahu zadaného čtverce.
(NG) Od obsahu čtverce odečteme obsah čtyř čtvrtkruhů s poloměrem 6, tj. obsah celého kruhu o poloměru 6. Hledaný obsah je tedy roven $S = 12^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 6^2 = 144 - 36\pi \doteq 31$.
(VG) Od obsahu čtverce odečteme obsah čtyř shodných nevybarvených útvarů, nejprve tedy vypočteme hodnotu tohoto obsahu. To můžeme učinit tak, že od obsahu čtverce odečteme obsah dvou čtvrtkruhů, čímž vypočteme obsah dvojice nevybarvených útvarů (viz obrázek).



Čtvrtkruhy se (vzhledem k symetrii celého útvaru) dotýkají ve středu čtverce, jejich poloměr je proto roven polovině úhlopříčky čtverce, tj. $\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 12 = 6\sqrt{2}$. Hledaný obsah dvojice nevybarvených útvarů má proto hodnotu $12^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 144 - 36\pi$. Čtveřice nevybarvených útvarů má tudíž obsah $288 - 72\pi$ a celkový obsah modré části je tedy $S = 144 - (288 - 72\pi) = 72\pi - 144 \doteq 82$.

22. úloha (pondělí 22. 12.)

Řešte rovnici v oboru kladných čísel:

$$\boldsymbol{x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = 2^{22}}$$

Řešení: 1024
Počet správných odpovědí: 29

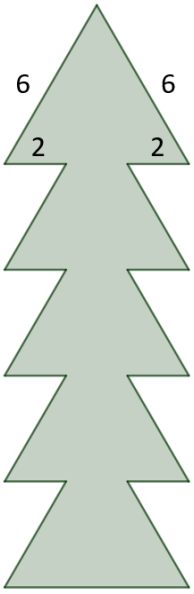
Postup: Postupně budeme upravovat obě strany zadané rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + x^2 + x^2 &= 2^{22} \\ 4x^2 &= 2^2 \cdot 2^{20} \qquad / : 4 \\ x^2 &= 2^{20} \\ x^2 &= (2^{10})^2 \\ x &= 2^{10} = 1024 \qquad (x > 0) \end{aligned}$$

Na závěr zdůrazněme, že nebýt podmínky ze zadání úlohy, měla by uvedená rovnice ještě záporné řešení $x_2 = -1024$.

23. úloha (úterý 23. 12.)

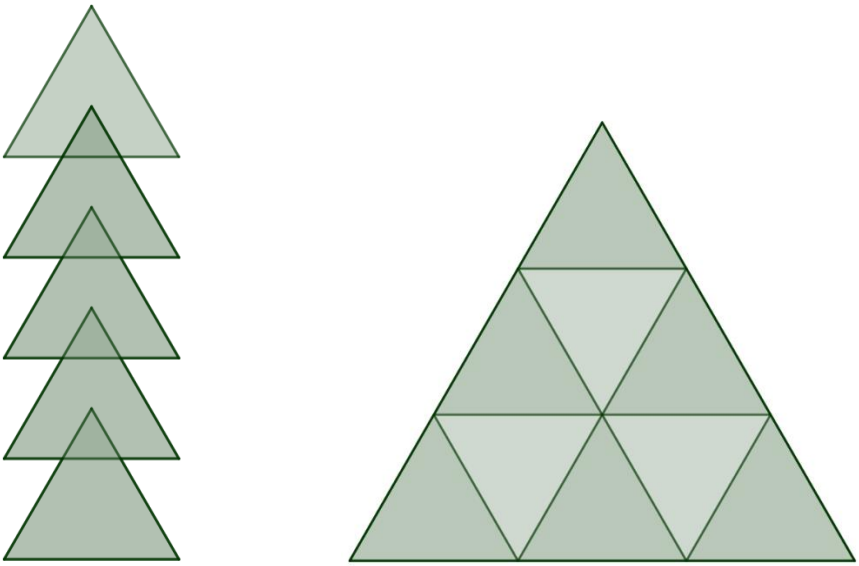
Vánoční stromek je vytvořen z 5 shodných překrývajících se rovnostranných trojúhelníků.
Vypočtěte jeho obsah, jestliže délka strany každého trojúhelníku je 6 a délka každého kratšího „výčnělku“ je 2 (viz obrázek).



(Uveďte výsledek zaokrouhlený na celé jednotky, nebo přesnou hodnotu.)

Řešení: $41\sqrt{3} \doteq 71$
Počet správných odpovědí: 27

Postup: Jelikož mají kratší „výčnělky“ délku 2, je průnikem dvojice sousedních trojúhelníků vždy rovnostranný trojúhelník o délce strany 2, který je podobný se zadaným trojúhelníkem s koeficientem podobnosti $\frac{1}{3}$ (viz první obrázek). Obsah tohoto menšího trojúhelníku je proto roven $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ obsahu většího trojúhelníku (viz druhý obrázek).



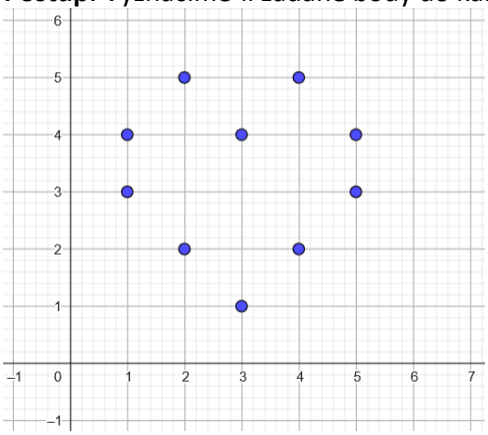
Celý obrazec se přitom skládá z celkem 9 + 8 + 8 + 8 + 8 = 41 menších trojúhelníků. Vzhledem k tomu, že výška v rovnostranném trojúhelníku o délce strany a má délku $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, je obsah rovnostranného trojúhelníku roven $\frac{a \cdot v}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Obsah celého obrazce je proto $S = 41 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = 41\sqrt{3} \doteq 71$.

24. úloha (středa 24. 12.)

Odpovědí na dnešní závěrečnou úlohu je slovo na pět písmen, které se skrývá pod níže uvedenými souřadnicemi a věnujeme jej všem, kdo se zapojili do letošního Matematického adventního kalendáře!
[3;1], [5; 3], [2; 5], [3; 4], [4; 2], [1; 3], [4; 5], [2; 2], [5; 4], [1; 4]
Děkujeme za účast a přejeme krásné vánoční svátky!
(Vyhodnocení výzvy proběhne v novém roce 2026.)

Řešení: srdce
Počet správných odpovědí: 29

Postup: Vyznačíme-li zadané body do kartézské soustavy souřadnic, obdržíme:



Hledaným slovem je tedy SRDCE.